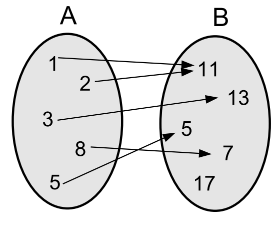
Funkcia

a jej vlastnosti



Definícia funkcie: Funkciu môžme definovať rôzne - zložito (presne, zdĺhavo, neintuitívne) alebo jednoducho (jasne ale nie celkom presne)[1]. Skúsime teda sformulovať, čo je to funkcia:

Definícia 1 *Funkciou z číselnej množiny A do číselnej množiny B nazývame predpis, ktorý každému prvku množiny A priradí práve jeden prvok množiny B.*

Funkcie označujeme zvyčajne malými písmenami f, g a pod. Ak f je funkcia z množiny A do množiny B a $a \in A$, tak prvok, ktorý táto funkcia priraďuje prvku a, označíme $f(a)$. Prvok $f(a)$ nazývame aj **funkčnou hodnotou funkcie** v čísle a. Premennú a nazývame aj **nezávysle premenná** (alebo argument funkcie). Množinu A nazývame aj **definičným oborom** funkcie f a ozačujeme ho $D(f)$ a množinu všetkých tých $b \in B$, ktoré sú funkčnou hodnotou nejakého prvku z množiny A nazývame **oborom hodnôt** funkcie f a označujeme ho $H(f)$.
Funkciu možme určiť analyticky, t. j. „vzorcom“, ale aj vypísaním dvojíc a, b, takisto môžme funkciu určiť jej grafom alebo môžme funkcie definovať kadejakými inými spôsobmi[2]. Funkcie sa definujú zvyčajne napríklad takto: funkcia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ taká, že $f(x) = x^2$ (funkcia z množiny $\mathbb{R}$ do množiny $\mathbb{R}$ taká, že ku každému x z $\mathbb{R}$ priradí $f(x)$ také, že $f(x) = x^2$). Platí taký dohovor, nakoľko je nepohodlné uvádzať pri každej funkcii jej definičný obor, že pri funkciách daných analyticky je definičný obor (pokým sa nepovie ináč) množina všetkých reálnych čísel, pre ktoré výraz definujúci funkciu má zmysel.
Grafom funkcie rozumieme množinu bodov v súradnicovej sústave so súradnicami $[a,\ f(a)]$, kde $a \in D(f)$. Na os x sa teda nanášajú prvky množiny z definičného oboru funkcie a na os y funkčné hodnoty, teda prvky z oboru hodnôt. Z tohto dôvodu sa niekedy na zápis funkcie používa tvar $y = f(x)$ (napríklad $y = 4x + 2$. Tento zápis je možné vidieť asi najčastejšie v zošitoch študenta gymnázia).

Vlastnosti funkcie: Na tomto mieste zadefinujeme jednotlivé vlastnosti funkcie. Definície môžu byť na prvý pohľad neintuitívne a preto budeme dané vlastnosti demonštrovať grafom funkcie (na konci dokumentu), ktorá danú vlastnosť má.

♣ Prostá funkcia

Definícia 2 *Hovoríme, že funkcia f z množiny A do množiny B je prostá, ak rôznym prvkom množiny A priraďuje rôzne prvky množiny B, t.j. pre všetky $x_1, x_2 \in A$ platí: ak $x_1 \neq x_2$ tak $f(x_1) \neq f(x_2)$.*
Prostou funkciou je napríklad lineárna funkcia $f(x) = 2x + 3$.

♣ Monotónnosť

Definícia 3 *Funkcia f je (na celom $D(f)$ alebo na množine $M \subset D(f)$) rastúca (klesajúca) ak pre všekty $x_1, x_2 \in D(f)$ (resp. $x_1, x_2 \in M$) platí: ak $x_1 < x_2$, tak aj $f(x_1) < f(x_2)$ (resp. $f(x_1) > f(x_2)$).*
Funkcia je rýdzomonotónna ak je buď rastúca alebo klesajúca. Ak je funkcia rýdzomonotónna, tak je prostá (obrátene to vo všeobecnosti neplatí). Príklad rýdzomonotónnej funkcie (rastúcej) je $f(x) = x^3$.

♣ Ohraničenosť

Definícia 4 *Hovoríme, že funkcia f je ohraničená na množine M, ak existuje také číslo k, že pre každé $x \in M$ je $|f(x)| < k$. Funkcia je zdola (zhora) ohraničená na množine M, ak existuje také číslo d (h), že pre každé $x \in M$ je $f(x) > d$ ($f(x) < h$).*
Po lopate povedané: ak je obor hodnót ohraničený zdola (zhora), funkcia je ohraničená zdola (zhora). Ak je funkcia ohraničená aj zdola aj z hora, je ohraničená, teda jej obor hodnót je ohraničený. Ohraničenou funkciou je napríklad $f(x) = \sin x$. Neohraničená funkcia je napríklad $f(x) = \operatorname{tg} x$.

♣ Existencia maxima a minima

Definícia 5 *Funkcia f má v čísle r maximum (minimum) ak pre každé $x \in D(f)$ platí, že $f(x) \leq f(r)$ ($f(x) \geq f(r)$).*
Po lopate: funkcia má v danom bode maximum (minimum) ak je funkčná hodnota v tom bode najvyššia (najnižšia). Ak má funkcia maximum (minimum) je zhora (zdola) ohraničená (obrátene neplatí, napríklad $f(x) = 1/x$ je zdola ohraničená ale nemá minimum v žiadnom bode!). Príklad: funkcia $f(x) = -(x+3)^2 - 1$ má maximum v čísle -3. Minimum nemá v žiadnom čísle.

[1] Potom existujú ešte hlúpe, zle formulované a dôležito sa tváriace definície, ktoré často môžete niekde zbadať

[2] Takzvané fresnelove integrály (funkcie podobné sínusom a kosínusom) sú definované takýmto spôsobom: $S(u) = \int_0^u \sin(\frac{1}{2}\pi x^2)\,\mathrm{d}x$ a $C(u) = \int_0^u \cos(\frac{1}{2}\pi x^2)\,\mathrm{d}x$, čo sa dá zapísať elegantne ako

$$C(u) + \mathrm{i}S(u) = \int_0^u \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi x^2/2}\,\mathrm{d}x$$

♣ **Vlastnosti symetrie** Niektoré funkcie majú tú vlastnosť, že ich grafy sú symetrické.

♡ **Párna funkcia**

Definícia 6 *Funkcia f s definičným oborom $D(f)$ je párna*[3]*, keď pre každé číslo x platí, že ak $x \in D(f)$ tak aj $-x \in D(f)$ a zároveň pre každé $x \in D(f)$ platí, že $f(x) = f(-x)$.*

Takáto funkcia je osovo symetrická podľa osi y. Medzi párne funkcie patria všetky mocninné funkcie s párnym exponentom a napríklad aj funkcia kosínus.

♡ **Nepárna funkcia**

Definícia 7 *Funkcia f s definičným oborom $D(f)$ je nepárna, keď pre každé číslo x platí, že ak $x \in D(f)$ tak aj $-x \in D(f)$ a zároveň pre každé $x \in D(f)$ platí, že $f(x) = -f(-x)$.*

Takáto funkcia je stredovo symetrická so stredom súradnicovej sústavy. Medzi napárne funkcie patria mocninné funkcie s nepárnym exponentom a napríklad aj sínus, tangens a kotangens.

♣ **Periodická funkcia**

Definícia 8 *Hovoríme, že funkcia f je periodická s periódou p, ak pre každé $x \in D(f)$ platí $f(x+p) = f(x)$.*

Graf periodickej funkcie je zhodný so svojím obrazom pri posunutí o p v smere osi x. Príklad na periodické funkcie sú goniometrické funkcie.

Operácie s funkciami: Pomocou jednej alebo viacerých funkcií dokážeme vytvoriť ďalšie funkcie pomocou operácií s funkciami. Spomenieme tri operácie: **Algebraické operácie** sú známe operácie ako sčítavanie, odčítavanie, násobenie a delenie. V tomto zmysle pracujeme s funkčnými hodnotami funkcií ako s číslami či premennými a takto získavame nové funkcie (môžme takto vytvoriť novú funkciu $f(x)$ z funkcií $g(x) = x^2$ a $h(x) = \sin x$ napríklad takto $f(x) = g(x) + 2h(x) = x^2 + 2\cos(x)$). Ďalej môžme funkcie skladať a dostaneme **zložené funkcie**. Robí sa to tak, že funkčná hodnota jednej funkcie bude argumentom druhej, teda $h(x) = f(g(x))$ (napríklad $f(x) = \sin(x^2)$). Viac sa budeme venovať tretej operácii, a tou je **inverzná funkcia**. Už sme si hovorili čo je to prostá funkcia. Ak f je prostá funkcia, tak každé $f(a)$ určuje jednoznačne a, pre ktoré je $f(a)$ jeho funkčnou hodnotou a teda môžme definovať novú funkciu.

Definícia 9 *Nech f je prostá funkcia na množine A (definičný obor), nech B je jej obor hodnôt. Potom funkciu g s definočným oborom B a oborom hodnôt A definovanú predpisom $g(b) = a$ práve vtedy, keď $f(a) = b$ nazývame inverznou funkciou k funkcii f. Inverznú funkciu k funkcii f označujeme obýčajne f^{-1}.*

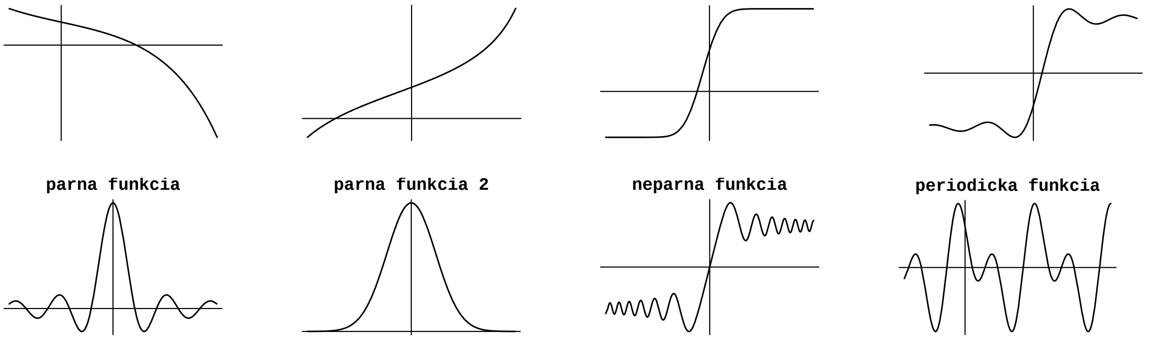
Teda keď hľadáme inverznú funkciu, zaujíma nás, čo sa zobrazí na prvok b, totiž ak $f(a) = b$, tak $f^{-1}(b) = a$. Teda nech $f(a) = 2a = b$. Potom $a = \frac{b}{2}$, čiže $f^{-1}(b) = \frac{b}{2}$.

Uvedieme zopár dvojíc funkcií, ktoré sú navzájom inverzné: $b = a^2$ a $a = \sqrt{b}$; $b = c^a$ a $a = \log_c b$; $b = \cos a$ a $a = \arccos b$ (ale pozor, nie je celkom pravda, že funkcie v prvom a treťom príklade sú navzájom inverzné funkcie. Treba pri určení tých funkcií niečo dodať, čo?)

Platí zaujímavá vec, že graf inverznej funkcie f^{-1} je osovo súmerný s grafom funkcie f podla osi, ktorá je grafom funkcie $f(x) = x$.

Ďalej si môžme uvedomiť, že zložním funkcie f a jej inverznej funkcie f^{-1} dostaneme $f^{-1}(f(a)) = a$ alebo naopak $f(f^{-1}(b)) = b$

Elementárne funkcie: Prakticky **všetky** funkcie s ktorými sa stretávame sú vytvorené zo základných typov funkcií (ktoré teraz vymenujeme) pomocou vyššie spomenutých operácií. Takéto funkcie sa nazývajú elementárne. Takže základné typy funkií sú: **polynomická funkcia** (napríklad $f(x) = x^3 + 2x^2 + 1$, patrí sem aj konštantná, lineárna, kvadratická a mocninná funkcia), **racionálna funkcia** (definovaná ako podiel dvoch polynomických funkcií, napríklad $f(x) = \frac{x^2+2x}{x-1}$, patrí sem aj lineárne lomená funkcia), **goniometrické** (nazývané aj trigonometrické) funkcie (napríklad $f(x) = \sin x$, $g(x) = \operatorname{cosec} x = \frac{1}{\sin x}$), ďalej **exponenciálna** a **logaritmická funkcia** (čo je inverzná f. k exponenciálnej) ($f(x) = a^x$ a $g(x) = \log_a x$) a nakoniec sú to **hyperbolické funkcie** (napríklad hyperbolický kosínus $f(x) = \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$).



[3] V českej literatúre sa môžte stretnúť s pojmom „sudá/lichá funkce“ kde je dobré si pamätať, že sudý = párny (alebo lichý = nepárny). Tento poznatok využijete aj v iných situáciách!