Goniometrické (trigonometrické) funkcie

Oblúková miera, reálne čísla a body jednotkovej kružnice. Uhly môžme merať v stupňoch a radiánoch (oblúková miera). V stupňoch uhly merať určite vieme (90° je pravý uhol) a vzťah medzi stupňami a radiánmi je nasledovný: 180 stupňov je π radiánov a teda 1 stupeň je $\pi/180$ radiánov a 1 radián je $180/\pi$ stupňov.
Z toho potom vyplýva, že **veľkosť uhla meraného v radiánoch zodpovedá dĺžke kružnicového oblúka** prislúchajúceho tomuto uhlu na jednotkovej kružnici (keďže dĺžka polkružnice s polomerom 1 prislúcha uhlu π radiánov).
Teraz každému reálnemu číslu x priradíme bod A na jednotkovej kružnici. Majme jednotkovú kružnicu k v súradnicovej sústave so stredom v začiatku sústavy a P nech je priesečník k s kladným smerom osi x. Pohybujme sa teraz z bodu P po jednotkovej kružnici proti smeru hodinových ručičiek. Dráhu ktorú prejdeme označme x a bod v ktorom sa nachádzame označme $A[x_A, y_A]$. Pri zápornom x pôjdeme len opačným smerom. Každé reálne číslo x teda jednoznačne určuje bod A (teda jeho súradnice x_A a y_A).

Definícia funkcií sínus, kosínus, tangens a kotangens. V zmysle predchádzajúcich úvah definujeme funkcie sínus a kosínus ako

$$\sin x = y_A \qquad \cos x = x_A$$

Sínus je teda taká funkcia, ktorá priraďuje k číslu x súradnicu y_A, kosínus priraďuje x_A[1].
Funkcie tangens a kotangens môžme definovať taktiež geometrickým spôsobom, alebo jednoducho takto:

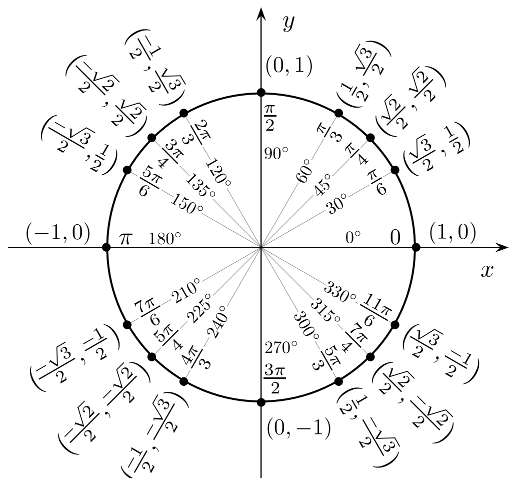
$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x} \qquad \operatorname{cotg} x = \frac{\cos x}{\sin x} \qquad \text{a taktiež definujeme funkcie} \qquad \operatorname{cosec} x = \frac{1}{\sin x} \qquad \sec x = \frac{1}{\cos x}$$

Z definícií vyplýva aj použitie goniometrických funkcií v trigonometrii, kde sínus uhla v pravouhlom trojuholníku je pomer protilahlej strany ku prepone, kosínus pomer prilahlej odvesny ku prepone, tangens pomer protilahlej odvesny ku prilahlej odvesne a kotangens naopak.

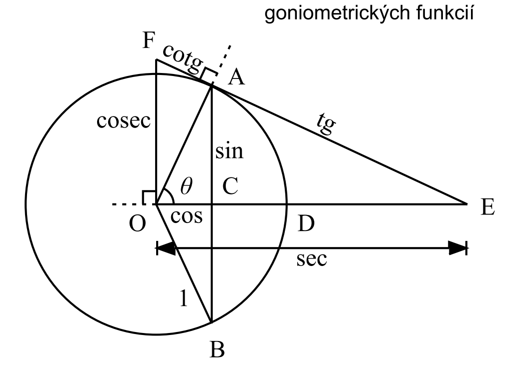
Vlastnosti goniometrických funkcií. V prvom rade, všetky goniometrické funkcie sú **periodické**, čo súvisí s ich definíciou. Funkcie sínus a kosínus sú periodické s periódov 2π a funkcie tangens a kotangens s periódou π. Stačí nám teda poznať priebeh funkcií (ich grafy sú uvedené na konci dokument) na intervale $\langle 0, 2\pi)$ resp. $\langle 0, \pi)$ a potom múdro využívať ich periodicitu. Funkcie **nie sú prosté** (čo je prirodzené, keďže sú periodické, ale nie sú prosté ani na intervale $\langle 0, 2\pi)$), na čo si treba dávať pozor pri riešení goniometrických rovníc (ak máme rovnicu $\sin x = 1/2$, tak riešením je množine $K = \{\pi/6 + 2k\pi;\ k \in \mathbb{Z}\} \cup \{5/6\pi + 2k\pi;\ k \in \mathbb{Z}\}$). Funkcie sínus a kosínus sú ohraničené, čo znamená, že ich obor hodnôt je nejaký uzavretý interval (napríklad rovnici $\cos x = 5$ nevyhovuje niaké reálne[2] x). Funkcia kosínus je ako jediná z goniometrických funkcií **párna**. Sínus, tangens a kotangens sú **nepárne**.

Hodnoty gon. funkcií pre význačné hodnoty uhlov. Uvedieme teraz hodnoty gon. funkcií pre význačné uhly a ukážeme súvis medzi priebehom funkcie v jednotlivých kvadrantoch.

	0 0°	$\pi/6$ 30°	$\pi/4$ 45°	$\pi/3$ 60°	$\pi/2$ 90°	$\pi-\pi/3$ $180^\circ-60^\circ$	$\pi-\pi/4$ $180^\circ-45^\circ$	$\pi-\pi/6$ $180^\circ-30^\circ$	π 180°	$\pi+\pi/6$ $180^\circ+30^\circ$	$\pi+\pi/4$ $180^\circ+60^\circ$
$\sin x$	0	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$	0	$-1/2$	...
$\cos x$	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$	0	$-1/2$	$-\sqrt{2}/2$	$-\sqrt{3}/2$	-1	$-\sqrt{3}/2$	...
$\operatorname{tg} x$	0	$\sqrt{3}/3$	1	$\sqrt{3}$	-	$-\sqrt{3}$	-1	$-\sqrt{3}/3$	0	$\sqrt{3}/3$	...
$\operatorname{cotg} x$	-	$\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}/3$	0	$-\sqrt{3}/3$	-1	$-\sqrt{3}$	-	$\sqrt{3}$	...



Geometrická interpretácia goniometrických funkcií



[1] Je zaujímavé, že keď umocníme číslo e (eulorovo číslo, $e \approx 2,71828182846$) na nejaký x-tý násobok komplexnej jednotky i (definované ako $i^2 = -1$), tak dostaneme zaujímavý Eulerov vzťah. Niekedy sa na definíciu gon. funkcií používa práve táto rovnosť.

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

[2] No v obore komplexných čísel má táto rovnica množinu riešení $K = \{2k\pi + i\cosh^{-1}(5);\ k \in \mathbb{Z}\} \cup \{2k\pi - i\cosh^{-1}(5);\ k \in \mathbb{Z}\}$

Ak poznáme hodnoty funkcií v intervale $\langle 0, \pi/2\rangle$ tak sme schopný zo znalosti priebehu funkcie vypočítať hodnoty funkcií pre ľubovolné x.[3] Spôsob bol naznačený aj v tabuľke no zovšeobecníme ho: Dá sa vidieť (z grafov, jednotkovej kružnice, vlastnosti funkcí ako párnosť, nepárnosť, periodicita), že platí

$$
\begin{aligned}
&\sin(x) = -\sin(-x) && \cos(x) = \cos(-x) && \mathrm{tg}(x) = -\mathrm{tg}(-x) && \mathrm{cotg}(x) = -\mathrm{cotg}(-x) && (1)\\
&\sin(x) = \sin(x-2k\pi) && \cos(x) = \cos(x-2k\pi) && \mathrm{tg}(x) = \mathrm{tg}(x-k\pi) && \mathrm{cotg}(x) = \mathrm{cotg}(x-k\pi) && (2)\\
&\sin(x) = \sin(\pi - x) && \cos(x) = -\cos(\pi - x) && \mathrm{tg}(x) = -\mathrm{tg}(\pi - x) && \mathrm{cotg}(x) = -\mathrm{cotg}(\pi - x) && (3)\\
&\sin(x) = -\sin(x-\pi) && \cos(x) = -\cos(x-\pi) && && && (4)\\
&\sin(x) = -\sin(2\pi - x) && \cos(x) = \cos(2\pi - x) && && && (5)
\end{aligned}
$$

Takže ak hladáme hodnotu $\sin x$ pre nejaké netradičné x, povedzme $x = -29/6\pi$, tak sa pozrieme na hore vypísané rovnosti a využijeme ich tak, aby sme k x-ku našli nejaké číslo y z intervalu $\langle 0, \pi/2\rangle$ také, že $\sin(x) = \pm\sin(y)$. Takže:

$$
\begin{aligned}
\sin(-29/6\pi) &\overset{(1)}{=} -\sin(29/6\pi) \\
\sin(29/6\pi) &\overset{(2)}{=} \sin(29/6\pi - 4\pi) = \sin(5/6\pi) \\
\sin(5/6\pi) &\overset{(3)}{=} \sin(\pi - 5/6\pi) = \sin(\pi/6)
\end{aligned}
\qquad \text{takže} \qquad \sin(-31/6\pi) = -\sin(\pi/6) = -1/2
$$

Vzťahy medzi gon. funkciami, súčtové vzorce. Teraz (bez odvodenia) uvedieme niektoré vzťahy medzi goniometrickými funkciami:

$$
\begin{aligned}
&\sin(\pm x + \pi/2) = \cos(x) && \sin^2 x + \cos^2 x = 1 && \sin^2 x = \frac{\mathrm{tg}^2 x}{1+\mathrm{tg}^2 x}\\
&\cos(\pm(x - \pi/2)) = \sin(x) && \mathrm{tg}\, x\, \mathrm{cotg}\, x = 1 && \cos^2 x = \frac{1}{1+\mathrm{tg}^2 x}\\
&\mathrm{tg}(\pi/2 - x) = \mathrm{cotg}(x) && &&
\end{aligned}
$$

Vzťahy nalavo sa niekedy využívajú na zjednodušovanie výrazov a uvidíme, že vyplývajú aj zo súčtových vzorcov, ktoré zachvílu uvedieme. Pomocou vzťahov v strede a napravo, môžme zo znalosti funkčnej hodnoty jednej funkcie dopočítať ostatné. Ďalšie vzťahy sú:

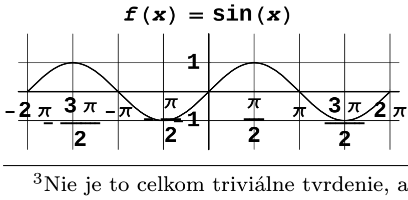
$$
\begin{aligned}
&\sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a && \sin(2a) = 2\sin a \cos a && \left|\sin\frac{a}{2}\right| = \sqrt{\frac{1-\cos a}{2}}\\
&\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b && \cos(2a) = \cos^2 a - \sin^2 b && \left|\cos\frac{a}{2}\right| = \sqrt{\frac{1+\cos a}{2}}\\
&\mathrm{tg}(a+b) = \frac{\mathrm{tg}\, a + \mathrm{tg}\, b}{1 - \mathrm{tg}\, a\, \mathrm{tg}\, a} && \mathrm{tg}(2a) = \frac{2\,\mathrm{tg}\, a}{1-\mathrm{tg}^2 a} && \left|\mathrm{tg}\frac{a}{2}\right| = \sqrt{\frac{1-\cos a}{1+\cos a}}
\end{aligned}
$$

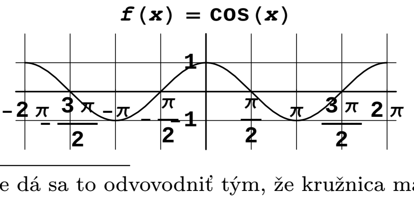
V lavom stĺpci sú tzv. súčtové vzorce. Potom vzorce pre dvojnásobný a polovičný uhol ktoré sa dajú zo súčtových vzorcov odvodiť. Súčtový vzorec pre tangens sa odvádza taktiež zo súčtových vzorcov pre sínus a kosínus. Tie sa dajú ľahko odvodiť z vlastností vektorových súčtov. Existujú aj vzorce pre rozdiel dvoch uhlov, ale tie sa dajú dostať len substitúciou $-b$ za b. Ďalšie vzťahy sú:

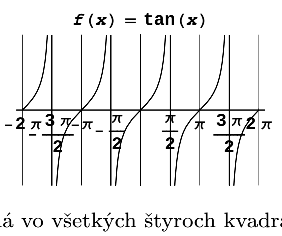
$$
\begin{aligned}
&\sin a + \sin b = 2\sin\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2} && \cos a \cos b = \frac{\cos(a-b)+\cos(a+b)}{2}\\
&\sin a - \sin b = 2\cos\frac{a+b}{2}\sin\frac{a-b}{2} && \sin a \sin b = \frac{\cos(a+b)-\cos(a-b)}{2}\\
&\cos a + \cos b = 2\cos\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2} && \sin a \cos b = \frac{\sin(a+b)+\sin(a-b)}{2}\\
&\cos a - \cos b = 2\sin\frac{a+b}{2}\sin\frac{a-b}{2} && \cos a \sin b = \frac{\sin(a+b)-\sin(a-b)}{2}
\end{aligned}
$$

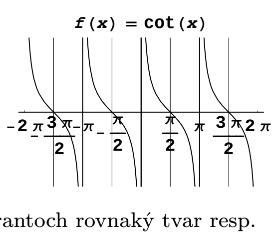
Na lavo sú vzorce, ktoré zo súčtu spravia súčin, na pravo zo súčinu súčet. Niekedy sa môžme stretnúť s využitím týchto vzorcov (tých na ľavo pri riešení goniometrických rovníc, či pri odvádzaní fyzikálnych zákonov).
Je zaujímavé, že pomocou niektorých z uvedených vzorcov a dopočítania $\sin 45^\circ = \sqrt{2}/2$ z rovnoramenného trojuholníka sme schopný zostrojiť tabuľky hodnôt ako to robili stredovekí učenci[4].

Grafy goniometrických funkcií.









[3] Nie je to celkom triviálne tvrdenie, ale dá sa to odvovodniť tým, že kružnica má vo všetkých štyroch kvadrantoch rovnaký tvar resp. sa funkcia správa v každom kvadrante veľmi podobne.

[4] Spomeňme Koperníkovho žiaka Reticusa (1514-1596), ktorý vypočítal 10-miestne tabulky s krokom 10 uhlových sekúnd. Nachádzalo sa tam ale mnoho chýb. Až Pitiscus priniesol naozaj dobré 15-miestne tabulky (1613). Gon. funkcie sa vtedy využívali hlavne na praktické účely v astronómii.